

*Università degli Studi di Trieste*

Corso di ingegneria industriale

**Esercitazioni di Fondamenti di Informatica**

Giacomo Strangolino

mailto/chat: [delleceste@gmail.com](mailto:delleceste@gmail.com)

**Materiale didattico anche su:**

**<http://www.giacomos.it>**

**(<http://www.giacomos.it/didattica/units/2011/>)**

# Lezione 6 (19/11/2012)

- Scrivere una funzione che, data la matrice completa che rappresenta un sistema lineare, ne trovi l'insieme delle soluzioni con il metodo di Gauss-Jordan.
- Si supponga che la matrice fornita rappresenti già un sistema determinato

# Lezione 6

Un sistema lineare di m equazioni in m incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

Può essere descritto dalla sua **matrice completa dei coefficienti** del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Per il nostro esercizio supponiamo che i coefficienti del sistema lineare appartengano a  $\mathbf{R}$   
Se con  $\mathbf{A}$  indico la matrice dei coefficienti, con  $\mathbf{B}$  il vettore colonna dei termini noti e con  $\mathbf{x}$  il vettore colonna delle incognite, allora il sistema si può scrivere come

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

# Lezione 6

**Per risolvere un sistema lineare si può:**

- scambiare l'ordine di scrittura di due equazioni;
- moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per un numero diverso da zero;
- sommare ad ogni membro di un'equazione la stessa quantità a sinistra e a destra.

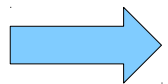
# Lezione 6

## **Sulla matrice, ciò equivale a:**

- scambiare tra loro 2 righe;
- moltiplicare una riga per uno scalare non nullo;
- sostituire una riga con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga.

## **Obiettivo:**

- Ottenere una matrice  $A$  a diagonale unitaria;



Il vettore  $B$  conterrà allora le soluzioni del sistema

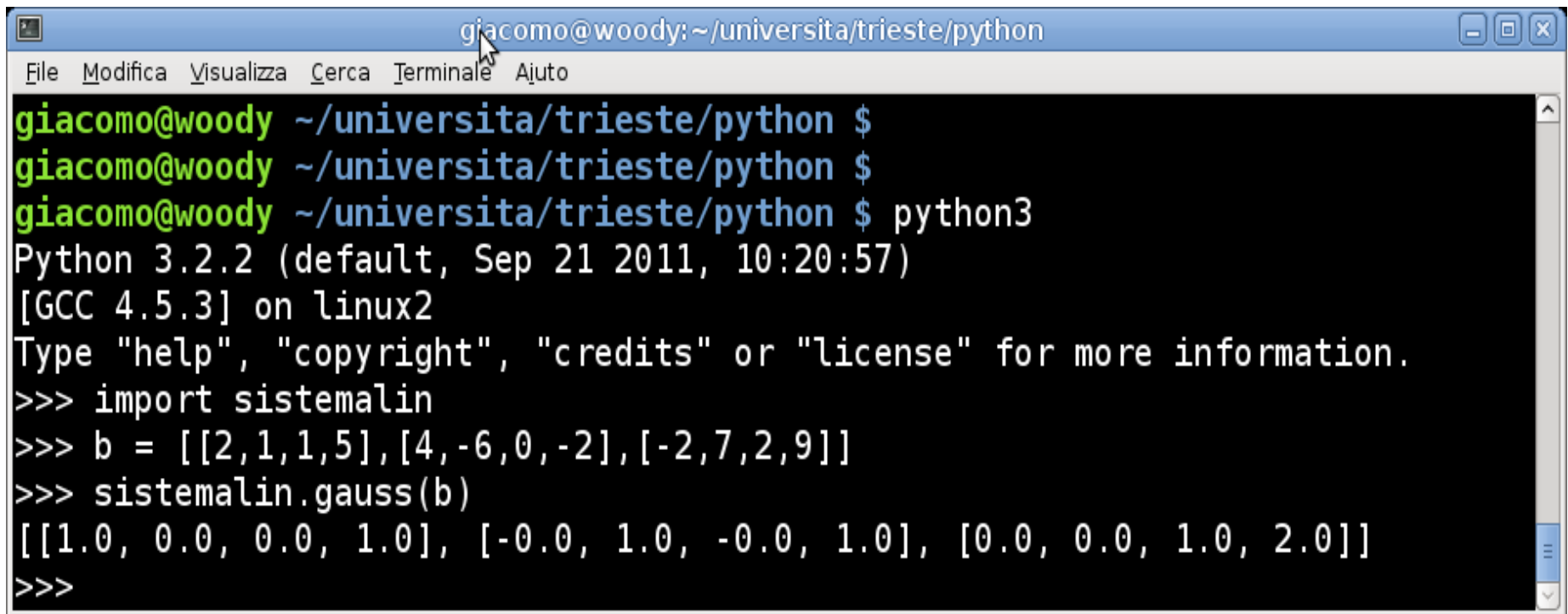
# Lezione 6

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

E così via... annullando successivamente anche gli elementi sopra la diagonale e finalmente rendendo la diagonale unitaria

# Lezione 6

A terminal window titled 'giacomo@woody:~/universita/trieste/python'. The window has a menu bar with 'File', 'Modifica', 'Visualizza', 'Cerca', 'Terminale', and 'Ajuto'. The terminal shows the following commands and output:

```
giacomo@woody ~/universita/trieste/python $  
giacomo@woody ~/universita/trieste/python $  
giacomo@woody ~/universita/trieste/python $ python3  
Python 3.2.2 (default, Sep 21 2011, 10:20:57)  
[GCC 4.5.3] on linux2  
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.  
>>> import sistemalin  
>>> b = [[2,1,1,5],[4,-6,0,-2],[-2,7,2,9]]  
>>> sistemalin.gauss(b)  
[[1.0, 0.0, 0.0, 1.0], [-0.0, 1.0, -0.0, 1.0], [0.0, 0.0, 1.0, 2.0]]  
>>>
```



**Soluzioni:  $x = 1.0$   $y = 1.0$   $z = 2.0$**

# Lezione 6 (19/11/2012)

## **Funzioni ricorsive**

- Una funzione può chiamare se stessa. Una funzione si dice ricorsiva se un'istruzione al suo interno chiama la funzione stessa. La ricorsione è un processo con il quale si definisce qualcosa in termini di se stesso (definizione circolare)

# Lezione 6

## Funzioni ricorsive: calcolo del fattoriale

- Il calcolo del *fattoriale* di un intero  $n$  è dato dal prodotto di tutti i numeri tra uno e  $n$
- Quando la funzione ricorsiva per il calcolo del fattoriale è chiamata con argomento pari ad 1, allora essa restituisce 1. Altrimenti, restituisce il valore di  $fattoriale(n - 1) * n$
- Es:  $fattoriale(2)$ . La prima chiamata causa una seconda chiamata ricorsiva con argomento 1. Quest'ultima restituisce quindi 1, che poi viene moltiplicato per 2 (il valore originale della chiamata).

# Lezione 6

## Funzioni ricorsive: calcolo del fattoriale

- Provate a tenere traccia delle chiamate per  $n$  che vale 3 e così via...
- Un buon metodo per verificare a che punto della computazione ricorsiva ci si trova è quello di inserire delle *print* nella funzione atte a evidenziare ad esempio il risultato parziale e il livello.

# Lezione 6

## Funzioni ricorsive

- Riscrivere la funzione fattoriale in modo ricorsivo.
- Scrivere un'implementazione in *python* dell'algoritmo *merge sort*.

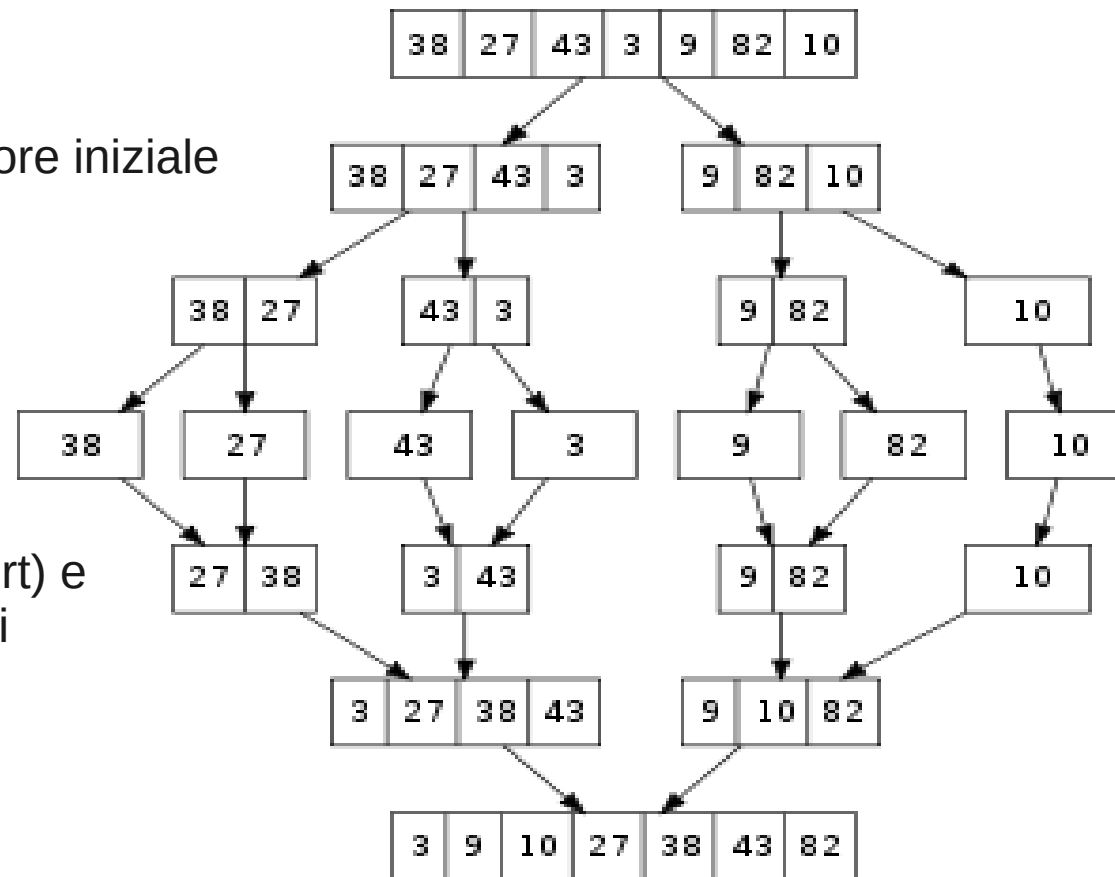
# Lezione 6

## Merge sort

Divido a metà il vettore iniziale

Metà della metà...

Merge... riordino (sort) e  
riassemblo (merge) i  
pezzi...



# Lezione 6

## Merge sort - prestazioni

- Tempo di esecuzione del merge dell'ordine di  $n$
- mergesort richiama se stessa due volte ogni volta su metà della porzione di input



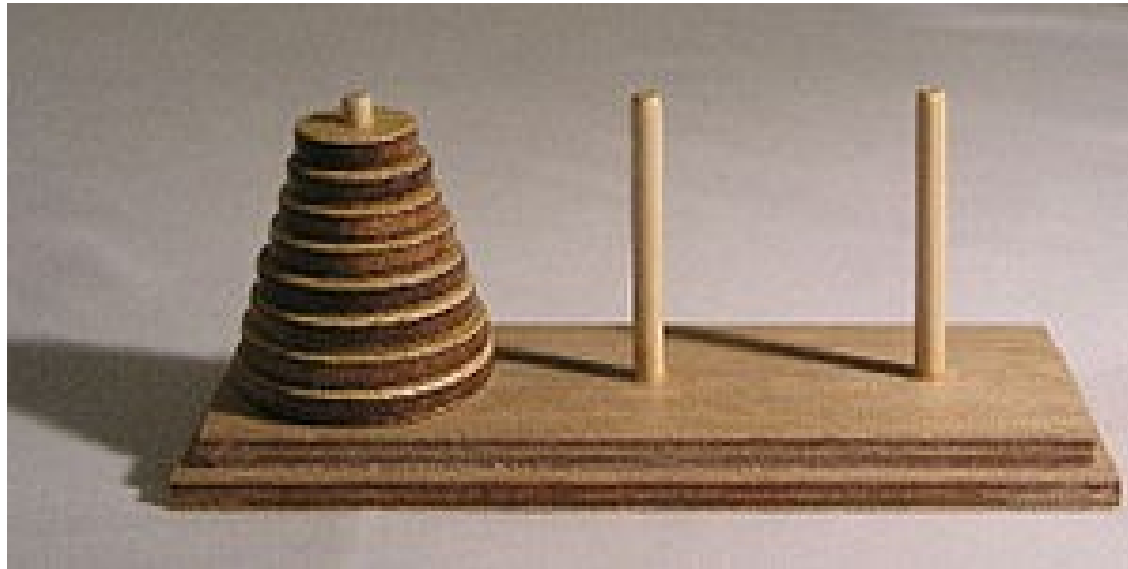
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$



Caso peggiore  $O(n \log n)$

# Lezione 6

## Torre di Hanoi



# Lezione 6

## Torre di Hanoi

Si scriva un programma per risolvere il rompicapo della Torre di Hanoi: un numero  $n$  di dischi, di diametro via via decrescente, sono impilati sul primo dei tre pioli della Torre di Hanoi. L'obiettivo è spostare tutti i dischi sull'ultimo piolo, rispettando le seguenti regole:

- si può spostare un disco solo per volta, su un qualsiasi piolo;
- non si può impilare un disco su uno più piccolo.

Suggerimento: per spostare  $k$  dischi dal piolo 1 al piolo 2, bisogna prima spostare i  $k-1$  dischi superiori dal piolo 1 al piolo 3.

Questo esercizio può essere risolto in modo “semplice” utilizzando la ricorsione.

Gioco online

[http://www.softschools.com/games/logic\\_games/tower\\_of\\_hanoi/](http://www.softschools.com/games/logic_games/tower_of_hanoi/)

# Lezione 6

## ***Homework***

- Si scriva una versione ricorsiva della successione di Fibonacci:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- Si riscriva l'implementazione dell'algoritmo per il calcolo del MCD in modo ricorsivo;
- Si riscriva la funzione che implementa l'algoritmo *binary search* in forma ricorsiva.